מבוא לתורת הקבוצות

פרק ראשון: יחס שקילות

הגדרה 1.1: יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

הגדרה 1.2: מחלקת שקילות של איבר a ביחס R היא $[a]_R = \{x \in A : aRx\}$.

משפט 1.3: יחס שקילות R על A מגדיר חלוקה של A לקבוצות זרות.

הוכחה: נראה שכל איבר $a \in A$ שייך לבדיוק מחלקת שקילות אחת. $a \in [a]_R$ כי aRa (רפלקסיביות). אם $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ ויהי c איבר בחיתוך, אז aRc ו-bRc, ולכן aRb (סימטריות וטרנזיטיביות), ולכן $[a]_R = [b]_R$. $\square$

פרק שני: פונקציות

הגדרה 2.1: פונקציה $f: A \to B$ היא יחס $f \subseteq A \times B$ המקיים: לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש-$(a,b) \in f$.

הגדרה 2.2: f נקרא חד־חד־ערכי (חח"ע) אם $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

הגדרה 2.3: f נקרא על (שמלא) אם $f(A) = B$.

הגדרה 2.4: f נקרא חח"ע ועל (חד־חד־ערכי ועל) אם הוא חח"ע ועל.

משפט 2.5: f חח"ע ועל אם ורק אם קיימת $f^{-1}: B \to A$ המקיימת $f \circ f^{-1} = id_B$ ו-$f^{-1} \circ f = id_A$.

הוכחה: אם f חח"ע ועל, לכל $b \in B$ קיים a יחיד כך ש-$f(a) = b$, ונגדיר $f^{-1}(b) = a$. $\square$

פרק שלישי: עוצמות

הגדרה 3.1: A ו-B בעלות אותה עוצמה אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל. נסמן $|A| = |B|$.

הגדרה 3.2: $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע.

משפט 3.3 (קנטור־שרדר־ברנשטיין): אם $|A| \leq |B|$ ו-$|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

הוכחה: נבנה $A_0 = A \setminus f(B)$, $A_n = f(B_{n-1})$, $B_n = g(A_n)$. נגדיר $h(x) = f(x)$ אם $x \in \bigcup_{n} A_n$, ו-$h(x) = g^{-1}(x)$ אחרת. h חח"ע ועל. $\square$

ڤڤڤ